AKADEMIA GÓRNICZO - HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA w KRAKOWIE

WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI, INFORMATYKI i ELEKTRONIKI

KATEDRA METROLOGII

LABORATORIUM METROLOGII

Analiza błędów i niepewności wyników pomiarowych

dr inż. Piotr Burnos

Kraków, 2010

Spis treści

1. Przyczyny błędów i niepewności pomiarowych

Otrzymany na drodze doświadczalnej wynik pomiaru dowolnej wielkości fizycznej zawsze różni się od wartości rzeczywistej tej wielkości. Wartość rzeczywista jest pojęciem abstrakcyjnym i nie jest znana eksperymentatorowi (gdyby była znana to pomiar byłby niepotrzebny). Pomiar pozwala zatem na znalezienie przybliżonych wartości wielkości mierzonej, a więc każdy wynik pomiaru obarczony jest niepewnością, która wynika z:

- ograniczonej dokładności przyrządów pomiarowych,
- ograniczeń wynikających z zastosowanej metody pomiarowej,
- niedoskonałości zmysłów obserwatora,
- wpływu innych czynników, które zakłócają pomiar.

Ograniczona dokładność przyrządów pomiarowych wynika z właściwości materiałów użytych do ich budowy, niedoskonałości wykonania elementów składowych i niedokładności wzorcowania. Nie istnieją więc idealne przyrządy pomiarowe, a jedynie takie które posiadają ograniczoną dokładność charakteryzowaną przez błąd graniczny Δ_{gr}. **Błąd graniczny** wyznacza największą wartość błędu wskazania, jaka może wystąpić w dowolnym punkcie zakresu pomiarowego przyrządu w przypadku jego poprawnego użytkowania w warunkach odniesienia. Do najważniejszych parametrów charakteryzujących **warunki odniesienia** należy zaliczyć: temperaturę, ciśnienie, wilgotność, brak wstrząsów, wibracji i innych zakłóceń (np. elektromagnetycznych).

Ograniczenia wynikające z zastosowanej metody pomiarowej wynikają przede wszystkim z oddziaływania przyrządów pomiarowych na wielkość mierzoną lub zjawisko będące źródłem tej wielkości i są nazywane **błędem metody**. Przykładem może być włączenie amperomierza co zmienia rozkład prądów i napięć w badanym obwodzie lub zainstalowanie termometru, który zmienia rozkład pola temperaturowego.

Niedoskonałość zmysłów obserwatora powoduje wprowadzenie błędów tam gdzie wynik pomiaru jest oceniany za pomocą zmysłów, np.: położenie wskazówki między dwiema działkami podziałki, natężenie dźwięku oceniane za pomocą słuchu, barwa lub temperatura światła oceniana na podstawie obserwacji wzrokowej.

Do **innych czynników zakłócających pomiar** zazwyczaj zaliczamy zakłócenia o charakterze losowym, a więc takie których wpływu na wynik pomiaru nie da się przewidzieć.

O końcowej niepewności pomiaru decydują błędy graniczne, błędy metody, błędy wynikające z oceny wyniku za pomocą zmysłów obserwatora oraz błędy losowe. Jeżeli jednak pomiar zostanie wykonany starannie w warunkach odniesienia, a błędy metody zostaną wyeliminowane poprzez wprowadzenie odpowiednich poprawek lub odpowiedni dobór przyrządów, to na końcową niepewność pomiaru główny wpływ ma błąd graniczny miernika.

Obliczanie niepewności pomiaru jest oparte o teorię niepewności, która zakłada, że błąd pomiaru ma cechy zdarzenia losowego, a więc podlega prawom statystyki. Inaczej mówiąc każdemu pomiarowi można przyporządkować prawdopodobieństwo wystąpienia błędu o określonej wartości i przypisać funkcję gęstości prawdopodobieństwa. W przeważającej liczbie przypadków uzasadnione jest założenie, że rozkład błędów dla przyrządów pomiarowych ma kształt prostokątny.

Zapamiętaj!

Obliczanie końcowej niepewności pojedynczego pomiaru bezpośredniego składa się z dwóch etapów:

Obliczenie błędu granicznego Δ_{gr} wynikającego z danych technicznych przyrządu pomiarowego,

Obliczenie niepewności standardowej u_b (nazywanej również niepewnością typu B) na podstawie obliczonego wcześniej błędu granicznego, przyjętego rozkładu tego błędu i dla założonego poziomu ufności p.

Obliczona niepewność wyznacza przedział, w którym z danym prawdopodobieństwem mieści się rzeczywista wartość wielkości mierzonej.

Wynik pomiaru wraz z oszacowaną niepewnością zapisujemy w następujący sposób:

$X = x \pm u_b$ *dla poziomu ufności p=.....*

Wynik pomiaru bez podanej niepewności jest bezwartościowy!

2. Błąd graniczny pomiaru miernikiem analogowym

Wartość błędu pomiaru przyrządem analogowym zależy od jego klasy dokładności *K* oraz zakresu pomiarowego *Z*. Przez **wskaźnik klasy dokładności** miernika analogowego należy rozumieć liczbę, która wyraża procentowy stosunek wartości bezwzględnego błędu granicznego Δ_{gr} do wartości zakresu pomiarowego:

$$K = \frac{\Delta_{gr}}{Z} \cdot 100 \tag{1}$$

Z powyższego wzoru wynika, że bezwzględny błąd pomiaru miernika w warunkach odniesienia, wyrażony w procentach wartości zakresu, dla żadnej wartości wielkości mierzonej w zakresie pomiarowym nie powinien przekraczać wskaźnika klasy dokładności. Dla przyrządów wskazówkowych rozróżnia się kilka klas dokładności, a najczęściej spotykane to: 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2,5; przy czym im większy wskaźnik klasy dokładności tym większy błąd pomiaru. Przekształcając powyższy wzór, uzyskujemy zależność na obliczenie bezwzględnego błędu granicznego:

$$\Delta_{gr} = \frac{K \cdot Z}{100} \tag{2}$$

Warto zauważyć, że bezwzględny błąd graniczny przyjmuje stałą wartość, niezależnie od wartości mierzonej. Względny błąd graniczny obliczamy natomiast z zależności:

$$\delta_{gr} = \frac{\Delta_{gr}}{x} \cdot 100 \tag{3}$$

gdzie x jest wartością zmierzoną. Z powyższej zależności wynika, że względny błąd graniczny pomiaru maleje wraz ze zwiększaniem wychylenia wskazówki. Z tego powodu zaleca się taki dobór zakresu pomiarowego, aby wychylenie wskazówki zawsze zawierało się w części podziałki powyżej ½ zakresu.

Pamiętaj!

Bezwzględny błąd graniczny pomiaru miernikiem analogowym jest stały w całym zakresie pomiarowym i zależy od klasy przyrządu i zakresu pomiarowego. Względny błąd graniczny, który jest stosunkiem błędu granicznego do wartości mierzonej, maleje wraz ze wzrostem tej wartości. Z tego powodu zakres przyrządu należy dobrać w taki sposób, aby wychylenie wskazówki znajdowało się w części podziałki powyżej ½ zakresu.

Przykład 1:
Woltomierzem o zakresie pomiarowym Zu=150 V i wskaźniku klasy 0,5 zmierzono napięcia 15V, 75V, 150V. Oblicz błędy graniczne pomiarów.

Bezwzględny błąd graniczny nie zależy od wartości zmierzonej i dla zakresu pomiarowego 150V wynosi:

$$\Delta_{gr}U = \frac{K \cdot Z_u}{100} = \frac{0{,}5 \cdot 150}{100} = 0.75\,\mathrm{V} = const$$

Względne błędy graniczne dla poszczególnych pomiarów wynoszą:

Dla U=150 V (pełny zakres pomiarowy) $\delta_{gr}U = \frac{\Delta_{gr}U}{U} \cdot 100 = \frac{0{,}75}{150} \cdot 100 = 0{,}5\%$

Dla U=75 V (połowa zakresu pomiarowego) $\delta_{gr}U = \frac{0{,}75}{75} \cdot 100 = 1{,}0\%$

Dla U=15 V (jedna dziesiąta zakresu pomiarowego) $\delta_{gr}U = \frac{0{,}75}{15} \cdot 100 = 5{,}0\%$

Zwróćmy uwagę: Dla wskazania 150V względny błąd graniczny jest równy wskaźnikowi klasy dokładności, jednak dla wskazania 75V błąd ten jest dwa razy większy, a dla 15V dziesięć razy większy niż wskaźnik klasy.

3. Błąd graniczny pomiaru miernikiem cyfrowym

Nieco odmiennie oblicza się błąd graniczny pomiaru przyrządem cyfrowym. W zależności od producenta przyrządu dokładność pomiaru może być wyrażana na dwa sposoby. **Pierwszy sposób** zapisu błędu przyrządu cyfrowego przedstawia wyrażenie:

$$(a\%\, wskazania + b\%\, zakresu) \tag{4}$$

Błąd jest zatem wyrażany za pomocą sumy dwóch składowych: procentu wartości wskazanej x oraz procentu zakresu pomiarowego Z_x. Współczynniki procentowe a i b są podawane przez producenta w dokumentacji technicznej przyrządu. Wzory obliczeniowe na błędy graniczne (bezwzględny i względny) mają postać:

$$\Delta_{gr} = \frac{a \cdot x + b \cdot Z_x}{100} \tag{5}$$

$$\delta_{gr} = a + b \cdot \frac{Z_x}{x} \tag{6}$$

Przykład 2:

Multimetrem Rigol DM3051 zmierzono napięcie stałe na zakresie 40V. Wskazanie wyniosło U=12,451V. Dokładność przyrządu podano w formacie (a% odczytu + b% zakresu). Odczytane z dokumentacji technicznej przyrządu współczynniki procentowe dla zakresu 40V wynoszą: a=0,025; b=0,006, a obliczone błędy graniczne odpowiednio:

$$\Delta_{gr} U = \frac{a \cdot U + b \cdot Z}{100} = \frac{0{,}025 \cdot 12{,}451 + 0{,}006 \cdot 40}{100} \cong 0{,}005V$$

$$\delta_{gr} U = a + b \cdot \frac{Z}{U} = 0{,}025 + 0{,}006 \cdot \frac{40}{12{,}451} \cong 0{,}04\%$$

Drugi sposób zapisu błędu z jakim można się spotkać w praktyce ma postać:

$$(a\%\, wskazania + n\, LSB) \tag{7}$$

Składnik n LSB (least significant bit) jest to wartość wynikająca z n-krotnego zwielokrotnienia rozdzielczości przyrządu cyfrowego. Przypomnijmy, że przez rozdzielczość miernika cyfrowego rozumiemy najmniejszą wartość jaka może być wyświetlona na danym zakresie pomiarowym. W takim przypadku wzory obliczeniowe na błędy graniczne przyjmują postać:

$$\Delta_{gr} = \frac{a \cdot x}{100} + n \cdot LSB \tag{8}$$

$$\delta_{gr} = a + n \cdot \frac{LSB}{x} \cdot 100 \tag{9}$$

Przykład 3:

Wykonano podobny pomiar jak w poprzednim przykładzie, jednak zastosowano Multimetr GwInstek GDM-8251A. Zakres pomiarowy wyniósł 100V, a wskazanie U=12,453V. Producent podał dokładność przyrządu w formacie (a% odczytu + n LSB), gdzie a=0,012%, n=5. Dla wykonanego pomiaru rozdzielczość wyniosła: 1mV. Błędy graniczne wynoszą odpowiednio:

$$\Delta_{gr}U = \frac{a \cdot U}{100} + n \cdot LSB = \frac{0{,}012 \cdot 12{,}453}{100} + 5 \cdot 0{,}001 \cong 0{,}006V$$

$$\delta_{gr}U = a + n \cdot \frac{LSB}{U} \cdot 100 = 0{,}012 + 5 \cdot \frac{0{,}001}{12{,}453} \cdot 100 \cong 0{,}05\%$$

4. Niepewność wyniku pomiaru

Ponieważ rzeczywista wartość wielkości mierzonej nie jest znana eksperymentatorowi, więc posługiwanie się pojęciem błędu pomiaru jest w praktyce niewygodne i formalnie nieuzasadnione (jeżeli przez błąd rozumiemy różnicę pomiędzy wartością zmierzoną, a wartością rzeczywistą). Obecnie przy opracowywaniu wyników pomiaru należy stosować zalecenia opracowane przez Międzynarodowy Komitet Miar (CIMP) i wydane przez Międzynarodową Organizację Normalizacyjną (ISO) w pozycji pod tytułem *„Guide to the Expression uf Uncertainty In Measurement”*. Polska wersja „przewodnika” została wydana przez Główny Urząd Miar pod tytułem *„Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik.”*

Ujednolicenie zasad obliczania i wyrażania niepewności umożliwia jednoznaczną interpretację wyników pomiarów wykonanych w różnych miejscach i w różnym czasie na całym świecie. Jest to szczególnie ważne dla służb miar i laboratoriów akredytowanych, a także ma istotne znaczenie dla wszystkich badaczy, którzy w swojej pracy korzystają z wyników pomiarów wykonanych przez inne osoby i którzy chcą aby wyniki ich pomiarów były wykorzystane przez innych.

Słowo **niepewność** należy rozumieć jako wątpliwość co do wartości wyniku pomiaru. W przewodniku (GUM 1999) niepewność jest zdefiniowana w następujący sposób:

parametr, związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej

Zgodnie z zaleceniem zawartym w przewodniku niepewność powinna być obliczana na **dwa sposoby**:

- u_A -niepewność standardowa typu A – dotyczy analizy statystycznej serii wyników pomiarowych,

- u_B - niepewność standardowa typu B – bazuje na naukowym osądzie obserwatora.

Znając niepewności typu A i typu B należy wyznaczyć niepewność standardową złożoną według zależności:

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \tag{10}$$

Jeżeli niepewność jednego rodzaju wyraźnie dominuje nad niepewnością drugiego rodzaju, np. jest ponad 10 razy większa, to mniejszą niepewność można zaniedbać i nie uwzględniać we wzorze 10. Wtedy niepewność złożona jest równa niepewności dominującej.

5. Ocena niepewności typu A

Rozpatrzmy przypadek gdy niepewność typu A jest dużo większa od niepewności typu B, którą obecnie zaniedbujemy. Niepewność typu A obliczana jest w przypadku, gdy wykonujemy za pomocą tego samego przyrządu lub układu pomiarowego, w tych samych warunkach otoczenia, serię pomiarów wielkości, której wartość rzeczywista jest z założenia stała. Jeśli poszczególne wartości pomiarów w tej serii x_1, x_2, … , x_N różnią się między sobą, oznacza to, że na układ pomiarowy i wielkość mierzoną wpływają w sposób przypadkowy czynniki o nieznanym charakterze i nasileniu, powodując błędy pomiaru, nazywane błędami przypadkowymi. Tym samym nie jest możliwa ocena, który z wyników pomiarowych jest najlepszym przybliżeniem wartości rzeczywistej. W takiej sytuacji wynik pomiaru oraz niepewność standardową typu A ocenia się **metodami statystycznymi** (Bendat i Piersol 1976). Na podstawie serii *N* pomiarów oblicza się wartość średnią, przyjmując, że jest to najlepsze oszacowanie wartości rzeczywistej:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{11}$$

Miarą rozrzutu wyników w serii pomiarowej wokół wartości średniej jest **odchylenie standardowe**:

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} \left(x_i - \bar{x}\right)^2} \tag{12}$$

Gdyby ten sam eksperyment został powtórzony, to wyniki pomiarowe w drugiej serii różniłyby się od wyników zgromadzonych w serii pierwszej. Tym samym wartość średnia wyników drugiej serii byłaby inna niż wartość średnia wyników z serii pierwszej. Wielokrotne powtórzenie tego samego eksperymentu pomiarowego, przyniosłoby w każdej serii inne wyniki pomiarowe, oraz inną wartość średnią danej serii. Okazuje się więc, że wartość średnia, którą przyjęliśmy za najlepsze oszacowanie wartości rzeczywistej, nie jest stała, ale również charakteryzuje się rozrzutem. Mówimy, że wskutek losowej zmienności wyników pomiarowych, wartość średnia ma cechy zmiennej losowej i może być opisana przez parametry statystyczne.

Odchylenie standardowe średniej, będące miarą losowej zmienności wartości średniej jest przyjmowane za **niepewność standardową typu A** i obliczane wg zależności:

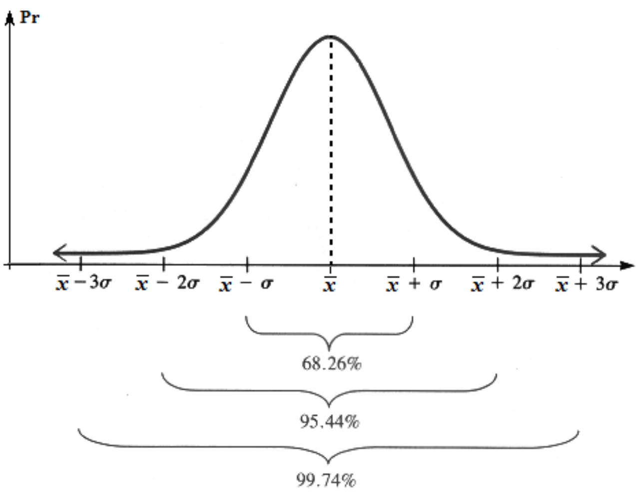
$$u_A(X) = \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{n=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2} \tag{13}$$

Niepewność standardowa typu A jest przedziałem wartości skupionych wokół wartości średniej i wyznacza przedział, w którym (prawdopodobnie) znajduje się wartość rzeczywista wielkości mierzonej. Ponieważ na wstępie założyliśmy, że niepewność typu A jest dużo większa od niepewności typu B, to niepewność złożona pomiaru wynosi:

$$u_C(X) = \sqrt{u_A^2(X) + u_B^2(X)} = u_A(X) \tag{14}$$

W praktyce najczęściej mamy do czynienia z sytuacją, gdy rozkład gęstości prawdopodobieństwa błędów pomiarowych *Pr* jest rozkładem normalnym, nazywanym również rozkładem Gaussa. Dla takiego rozkładu odchylenie standardowe ma szczególną **interpretację**:

- w przedziale wartości $\overline{x} \pm \hat{\sigma}_x$ mieści się 68% wyników pomiarowych,
- w przedziale wartości $\overline{x} \pm 2 \cdot \hat{\sigma}_x$ mieści się 95% wyników pomiarowych,
- w przedziale wartości $\overline{x} \pm 3 \cdot \hat{\sigma}_x$ mieści się 99% wyników pomiarowych.



Rysunek 1 Normalny rozkład gęstości prawdopodobieństwa.

Mając na uwadze powyższą interpretację odchylenia standardowego, prawdopodobieństwo tego, że rzeczywista wartość wielkości mierzonej mieści się przedziale wyznaczonym przez niepewność standardową u_A wynosi zaledwie 68%. Przyjęcie niepewności standardowej do oceny dokładności pomiaru daje więc zbyt małe zaufanie do wyniku pomiaru. Dlatego w końcowym wyniku uwzględnia się **niepewność rozszerzoną**, rozumianą jako iloczyn niepewności standardowej i współczynnika rozszerzania k. Niepewność rozszerzoną oznacza się dużą literą U.

$$U(X) = k \cdot u_C(X) \tag{15}$$

Jeżeli rozkład błędów jest rozkładem normalnym, a liczba pomiarów w serii jest większa niż 30, to współczynnik rozszerzania przyjmuje wartości standaryzowanej zmiennej losowej dla **rozkładu normalnego**. Wartości zmiennej standaryzowanej odczytuje się z tablic takiego rozkładu, dla danego poziomu ufności. Najczęściej stosowane wartości współczynnika k, dla określonego poziomu ufności p zawiera tabela 1.

Tabela 1

p	0,68	0,90	0,95	0,99
k	1,00	1,64	1,96	2,57

Jeżeli liczba pomiarów nie przekracza 30, to współczynnik rozszerzania przyjmuje wartości standaryzowanej zmiennej losowej rozkładu **t-Studenta**. Wartości tego współczynnika odczytuje się ze standaryzowanych tablic rozkładu t-Studenta dla założonego poziomu ufności i dla liczby stopni swobody η (Bendat i Piersol 1976). W przypadku gdy błędy pomiarowe nie posiadaj ani rozkładu normalnego ani t-Studenta, dopuszczalne jest **arbitralne** przyjęcie współczynnika rozszerzenia równego 2 lub 3 uznając, że tym wartościom odpowiadają poziomy ufności równe odpowiednio 0,95 i 0,99.

Przykład 4:

Multimetrem cyfrowym Rigol DM3051, zmierzono napięcie stałe N=35 razy. Wyniki zanotowano w tabeli. Zakładając, że niepewność typu B jest do pominięcia, obliczyć niepewność typu A, na poziomie ufności 0,95. Wyniki pomiarowe mają rozkład normalny.

n	U_i $[V]$	$U_i - \overline{U}$ $[V]$	$(U_i - \overline{U})^2$ $[V^2]$
1	1,4171	0.1701	0.0289
2	1,5477	0.3006	0.0904
3	0,9493	-0.2977	0.0886
…			…
34	1,2600	0.0130	0.0002
35	1,4192	0.1722	0.0296
$\sum$	43.6480	0	1.8254
Wartość średnia $\overline{U}$	1,2471		
Odchylenie standardowe $\hat{\sigma}_x$			0,2317
Niepewność standardowa u_A			0,0392

Wartość średnia napięcia w wykonanej serii pomiarowej wynosi:

$$\overline{U} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} U_i = 1{,}2471\,\mathrm{V}$$

Odchylenie standardowe serii jest równe:

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} \left(U_i - \overline{U}\right)^2} = 0{,}2317\,\mathrm{V}$$

Odchylenie standardowe średniej, czyli niepewność standardowa typu A wynosi:

$$u_A = \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{N}} = \frac{0{,}2317}{\sqrt{35}} = 0{,}0392\,\mathrm{V}$$

Ponieważ występuje tylko jedna niepewność, to niepewność standardowa złożona jest równa tej niepewności:

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = u_A = 0{,}0392\,\mathrm{V}$$

Liczba pomiarów jest wystarczająco liczna, aby współczynnik rozszerzenia odczytać z tablic rozkładu normalnego. Dla p=0,95, współczynnik rozszerzania jest równy k=1,96. Niepewność rozszerzona wynosi zatem:

$$U\left(\overline{U}\right) = k \cdot u_C = 1{,}96 \cdot 0{,}0392 = 0{,}0768\,\mathrm{V}$$

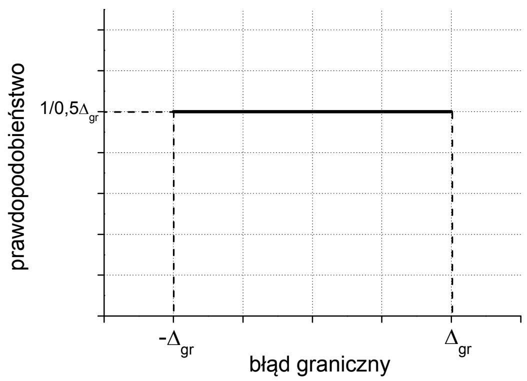
Wynik pomiaru można zapisać w następującej postaci:

$$U_x = \overline{U} \pm U\left(\overline{U}\right) = 1{,}2471 \pm 0{,}0768\,\mathrm{V}, \;\; \text{dla} \;\; p = 0{,}95$$

Powyższy zapis oznacza, że z prawdopodobieństwem równym 95%, rzeczywista wartość mierzonego napięcia mieści się w przedziale od 1,1703 V, do 1,3239 V.

6. Ocena niepewności typu B

Rozpatrzmy przypadek gdy niepewność typu B jest dużo większa od niepewności typu A, którą obecnie zaniedbujemy. Źródłem niepewności typu B jest niedokładność aparatury pomiarowej. Obliczenie tej niepewności wymaga więc w pierwszej kolejności obliczenia bezwzględnego błędu granicznego, oraz założenia określonego rozkładu prawdopodobieństwa tego błędu. Dla przyrządów pomiarowych za najbardziej odpowiednią funkcję gęstości prawdopodobieństwa rozkładu błędów przyjmuje się **rozkład jednostajny**, nazywany również prostokątnym. Szerokość tego rozkładu jest ograniczona wartościami błędu granicznego, a wartość funkcji gęstości prawdopodobieństwa w całym zakresie wartości błędu przyjmuje wartość $0{,}5\Delta_{gr}$. Przyjęcie takiego rozkładu oznacza, że błąd dla pojedynczego pomiaru ma wartość z przedziału $\pm\Delta_{gr}$, a prawdopodobieństwo jego wystąpienia jest stałe dla wszystkich wartości błędu i wynosi $0{,}5\Delta_{gr}$.



Rysunek 2 Jednostajny rozkład gęstości prawdopodobieństwa.

Parametrem opisującym dowolny rozkład prawdopodobieństwa jest **odchylenie standardowe**, będące miarą rozrzutu wartości wokół wartości średniej. Dla potrzeb pomiarowych odchylenie standardowe nazwano **niepewnością standardową typu B** $u_B(X)$. Dla rozkładu jednostajnego niepewność standardowa jest związana z błędem granicznym następującą zależnością:

$$u_B(X) = \frac{\Delta_{gr}}{\sqrt{3}} \tag{16}$$

Ponieważ na wstępie założyliśmy, że niepewność typu A jest dużo większa od niepewności typu B, to niepewność złożona pomiaru wynosi:

$$u_C(X) = \sqrt{u_A^2(X) + u_B^2(X)} = u_B(X) \tag{17}$$

Niepewność standardowa jest $\sqrt{3}$ razy mniejsza niż błąd graniczny, a więc zawęża przedział prawdopodobnych błędów do około 58% wartości błędu granicznego przyrządu. Z tego powodu, podobnie jak przy obliczaniu niepewności typu A, przyjęcie niepewności standardowej do oceny dokładności pomiaru daje zbyt małe zaufanie do wyniku pomiaru. Dlatego w końcowym wyniku pomiaru uwzględnia się **niepewność rozszerzoną**, rozumianą jako iloczyn niepewności standardowej i współczynnika rozszerzania k. Niepewność rozszerzoną oznacza się dużą literą U:

$$U(X) = k \cdot u_C(X) \tag{18}$$

Dla pomiarów bezpośrednich i jednostajnego rozkładu prawdopodobieństwa, współczynnik rozszerzenia przyjmuje wartość:

$$k = \sqrt{3} \cdot p \tag{19}$$

gdzie *p* jest przyjętym arbitralnie poziomem ufności.

Przykład 5:
Woltomierzem o zakresie pomiarowym Zu=150 V i wskaźniku klasy 0,5 jednokrotnie zmierzono napięcie 120,3 V. Podaj wynik pomiaru na poziomie ufności p=0.95.

- bezwzględny błąd graniczny pomiaru wynosi: $\Delta_{gr}U = \frac{K \cdot Z_u}{100} = \frac{0{,}5 \cdot 150}{100} = 0.75\,\mathrm{V}$

- niepewność standardowa: $u_B(U) = \frac{\Delta_{gr}U}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}75}{\sqrt{3}} = 0{,}43V$

- współczynnik rozszerzania: $k = \sqrt{3} \cdot p = \sqrt{3} \cdot 0{,}95 = 1{,}64$

- niepewność rozszerzona: $U(U) = k \cdot u_B(U) = 1{,}64 \cdot 0{,}43 = 0{,}71 \approx 0{,}7V$

- wynik pomiaru: $U_x = U \pm U(U) = 120{,}3 \pm 0{,}7V$, dla $p = 0{,}95$

Powyższy zapis oznacza, że z prawdopodobieństwem równym 95%, rzeczywista wartość mierzonego napięcia mieści się w przedziale od 119,6 V, do 121,0 V.

7. Ocena niepewności typu A i B

Jeżeli obydwie niepewności, typu A i B, mają ten sam rząd to niepewność złożoną wyznacza się według wzoru :

$$u_C(X) = \sqrt{u_A^2(X) + u_B^2(X)} \tag{20}$$

a niepewność rozszerzoną:

$$U(X) = k \cdot u_C(X) \tag{21}$$

Współczynnik rozszerzania k ma wartość wynikającą z przyjętego poziomu ufności oraz wypadkowego rozkładu wynikającego ze **złożenia** rozkładu normalnego (niepewność typu A) i rozkładu jednostajnego (niepewność typu B). Rozkład wypadkowy jest **splotem** rozkładów składowych, a jego wyznaczenie stwarza wiele problemów. Z tego powodu należy zastosować metodę umożliwiającą przybliżone wyznaczenie współczynnika rozszerzania, która oparta jest o założenie, że rozkład wypadkowy jest **zbieżny do rozkładu o większym odchyleniu standardowym** (Kuśmierek i Kalus-Jęcek 2006). Jeżeli $u_A(U) > u_B(U)$ to współczynnik rozszerzania przyjmuje wartości standaryzowanej zmiennej losowej rozkładu normalnego (lub t-Studenta). Jeżeli $u_A(U) < u_B(U)$, to współczynnik k przyjmuje wartości charakterystyczne dla rozkładu jednostajnego.

8. Ocena niepewności w pomiarach pośrednich

W pomiarach pośrednich wielkość mierzona Y jest wyznaczana jako funkcja innych wielkości mierzonych bezpośrednio X_j ($j=1, 2, \dots, K$).

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_K) \tag{22}$$

Niepewność pomiaru wielkości Y, jest więc zależna od niepewności „cząstkowych” z jakimi wyznaczane są poszczególne wielkości X_j. Jeżeli wielkości X_j są nieskorelowane ze sobą to niepewność pomiaru Y, wynika z **prawa propagacji niepewności** i wynosi:

$$u(Y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{K} \left(\frac{\partial f}{\partial X_j} \right)^2 \cdot u^2(X_j)} \tag{23}$$

gdzie: $\frac{\partial f}{\partial X_j}$ - pochodna cząstkowa równania (22), liczona względem wielkości X_j, $u(X_j)$ - niepewność standardowa pomiaru wielkości X_j.

Niepewność rozszerzoną wyznacza się ze znanej zależności:

$$U(Y) = k \cdot u(Y) \tag{24}$$

Aby w tym przypadku określić wartość współczynnika rozszerzania, dla danego poziomu ufności należy znać splot rozkładów wielkości X_j. W przypadku wyznaczania niepewności typu B, zazwyczaj przyjmuje się jednostajny rozkład błędów pomiaru wielkości X_j. Splot, dwóch rozkładów jednostajnych, jest rozkładem trójkątnym jeżeli niepewności standardowe typu B obydwu rozkładów są takie same. W przeciwnym razie rozkład wypadkowy jest rozkładem trapezowym. Jeżeli natomiast, wielkość wyznaczana pośrednio jest funkcją trzech lub więcej wielkości mierzonych bezpośrednio, to splot trzech lub więcej rozkładów jednostajnych dąży do rozkładu normalnego (Kuśmierek i Kalus-Jęcek 2006). Widać więc, że wyznaczenie współczynnika rozszerzania nie jest zadaniem łatwym. W praktyce często przyjmuje się założenie a'priori, że współczynnik rozszerzania dla poziomu ufności p=0,95 wynosi 2, a dla p=0,99 wynosi 3.

Przykład 6

Metodą techniczną zmierzono rezystancję. Napięcie na rezystancji zmierzono multimetrem RIGOL DM3051, na zakresie pomiarowym 40V, a prąd multimetrem analogowym UM-4a o wskaźniku klasy 1, na zakresie 0,6A. W wyniku przeprowadzonego pomiaru otrzymano wartości: U=6,234 V, I=0,402 A. Obliczyć wartość rezystancji R_x, oraz niepewność wyniku, dla poziomu ufności p=0,95.

Na podstawie prawa Ohma wiemy, że funkcja (22) ma w tym przypadku postać:

$$R = \frac{U}{I}$$

Wartość zmierzonej rezystancji:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{6,234}{0,402} = 15,50\Omega$$

Przyjęto jednostajny rozkład błędów przyrządów pomiarowych. Niepewność typu B pomiaru napięcia i natężenia prądu wynosi:

$$u_B(U) = \frac{\Delta_{gr}U}{\sqrt{3}} = \frac{a \cdot U + b \cdot Z}{\sqrt{3} \cdot 100} = \frac{0,025 \cdot 6,234 + 0,006 \cdot 40}{\sqrt{3} \cdot 100} \cong 0,002V$$

$$u_B(I) = \frac{\Delta_{gr}I}{\sqrt{3}} = \frac{K \cdot Z_I}{\sqrt{3} \cdot 100} = \frac{1 \cdot 0,6}{\sqrt{3} \cdot 100} \cong 0,003A$$

Niepewność złożoną wyraża się wzorem:

$$u(R) = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U}\right)^2 \cdot u_B^2(U) + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 \cdot u_B^2(I)} = \sqrt{\left(\frac{1}{I}\right)^2 \cdot u_B^2(U) + \left(\frac{U}{I^2}\right)^2 \cdot u_B^2(I)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{0,402}\right)^2 \cdot 0,002^2 + \left(\frac{6,234}{0,402^2}\right)^2 \cdot 0,003^2} = \sqrt{24,75 \cdot 10^{-4} + 13,39 \cdot 10^{-3}} = \sqrt{13,41 \cdot 10^{-2}} =$$

$$= 0,12\Omega$$

Do obliczenia niepewności rozszerzonej, na poziomie ufności p=0,95, przyjęto współczynnik rozszerzania k=2:

$$U(R) = k \cdot u(R) = 2 \cdot 0,12 = 0,24 \cong 0,25\Omega$$

Wynik pomiaru:

$$R_x = R \pm U(R) = 15,50 \pm 0,25\Omega,\ \text{dla}\ p = 0,95$$

Jaka jest interpretacja powyższego zapisu?

Bibliografia

Bendat, Julius, i Allan Piersol. *Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych.* Warszawa: PWN, 1976.

Bolkowski, Stanisław. *Teoria obwodów elektrycznych.* Warszawa: Wydawnictwa Naukowo - Techniczne, 1998.

Chwaleba, Augustyn, Maciej Poniński, i Andrzej Siedlecki. *Metrologia elektryczna.* Warszawa: WNT, 2000.

GUM. *Wyrażanie Niepewności Pomiaru. Przewodnik.* Warszawa: Główny Urząd Miar, 1999.

Kuśmierek, Zygmunt, i Bożenna Kalus-Jęcek. *Wzorce wielkości elektrycznych i ocena niepewności pomiaru.* Łódz: Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, 2006.

„PN-92/E-06501/01."

Tumański, Sławomir. *Technika Pomiarowa.* Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne , 2007.